

## C Weitere Eigenschaften von Funktionen

Zusammenhänge aus verschiedensten Praxisbereichen lassen sich mithilfe von Funktionen beschreiben und dadurch bezüglich bestimmter Eigenschaften untersuchen. Neben den bereits früher betrachteten Eigenschaften kann dabei auch das Grenzverhalten von Funktionen, also die Veränderung ihrer Werte für unbegrenzt wachsende bzw. fallende Argumente bedeutsam sein. Ein einfaches Problem soll dies verdeutlichen:

Mehrere Schafzüchter vereinigen einen Teil ihrer Bestände zu einer gemeinsamen Herde. Der Anteil jedes Züchters an dem durch Verkauf von Milch, Fleisch und Wolle erzielten Erlös möge nach der von ihm eingebrachten Tieranzahl berechnet werden.

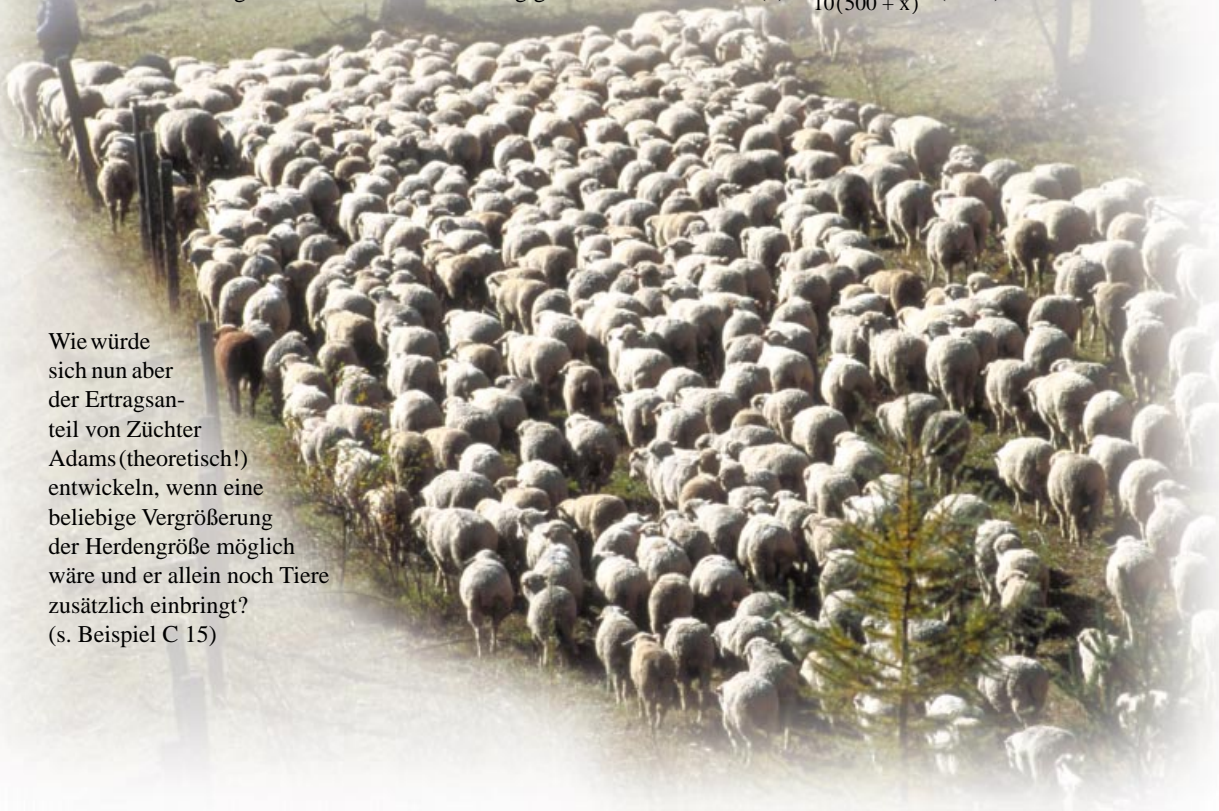
Zu einem bestimmten Zeitpunkt umfasst die Herde 500 Tiere. Züchter Adams hat dazu nur 50 Schafe aus seinem sehr großem Bestand beigesteuert. Mit dem ihm am Jahresende korrekt berechneten und ausgezahlten Ertragsanteil ist er nicht recht zufrieden und überlegt, wie sich dieser erhöhen ließe: Verdoppelt er seinen Anteil, so verdoppelt sich auch mein Gewinn ...

Wir diskutieren diese Überlegung unter der Voraussetzung, dass einer Herdenvergrößerung aufgrund der zur Verfügung stehenden Weidefläche nichts im Wege stehe und

- a) dass jeder der beteiligten Züchter sich wie Züchter Adams entscheidet,
- b) dass nur Züchter Adams wie beschrieben vorgeht,
- c) dass allein Züchter Adams seinen Beitrag um  $x$  Tiere erhöht.

Entscheidet sich jeder der beteiligten Züchter wie Adams und verdoppelt seinen Anteil (Fall a)), dann würde die Herde 1 000 Tiere umfassen, wobei 100 davon Züchter Adams gehören. Sein Ertragsanteil wie der der restlichen Züchter wäre dann unverändert  $\frac{100}{1000} = \frac{1}{10}$  bzw.  $\frac{900}{1000} = \frac{9}{10}$ . Verdoppelt nur Züchter Adams die Anzahl der in die Herde eingebrachten Tiere (Fall b)), dann wäre sein Ertragsanteil  $\frac{100}{550} = \frac{2}{11}$ . Sein Anteil würde sich also um  $\frac{2}{11} - \frac{1}{10} = \frac{9}{110}$  erhöhen. Da aber  $\frac{9}{110} < \frac{1}{10}$ , führt die Verdopplung der Anzahl der Tiere nicht zu einer Verdopplung des Gewinns. Erhöht nun Adams seinen Beitrag um  $x$  Tiere (Fall c)), so beträgt sein Ertragsanteil  $\frac{50+x}{500+x}$  bzw. die Ertragssteigerung  $\frac{50+x}{500+x} - \frac{50}{500}$ . Die Steigerung lässt sich demnach als eine Funktion  $f$  mit der Anzahl  $x$  der zusätzlich eingebrachten Tiere als unabhängige Variable auffassen:  $f(x) = \frac{9x}{10(500+x)}$  ( $x \in \mathbb{N}$ ).

Wie würde sich nun aber der Ertragsanteil von Züchter Adams (theoretisch!) entwickeln, wenn eine beliebige Vergrößerung der Herdengröße möglich wäre und er allein noch Tiere zusätzlich einbringt? (s. Beispiel C 15)



## C 1 Monotonie und Beschränktheit von Funktionen

Beim Anfertigen, Beschreiben und Interpretieren von Funktionsgraphen ist die Kenntnis bestimmter Eigenschaften von Funktionen von großem Nutzen. Einige solcher Eigenschaften – wie Nullstellen und Symmetrieverhalten (gerade und ungerade Funktion) – wurden bereits im Abschnitt A 2.1 betrachtet.

Die Untersuchung von Zahlenfolgen als speziellen Funktionen führte dann zu den Begriffen *Monotonie* und *Beschränktheit*, die nunmehr auf Funktionen allgemein übertragen werden sollen.

C 1

Definition C 1:

Eine Funktion  $f$  heißt in einem Intervall  $I$  ihres Definitionsbereichs  $D_f$  genau dann

**monoton wachsend,**

**monoton fallend,**

wenn für beliebige  $x_1, x_2 \in I$  gilt:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

Gilt sogar

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2),$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2),$$

so heißt  $f$

**streng monoton wachsend.**

**streng monoton fallend.**

C 2

Definition C 2:

Eine Funktion  $f$  heißt genau dann

**nach oben beschränkt,**

**nach unten beschränkt,**

wenn es eine Zahl  $s_o \in \mathbb{R}$  gibt,

wenn es eine Zahl  $s_u \in \mathbb{R}$  gibt,

so dass für alle  $x \in D_f$  gilt:

$$f(x) \leq s_o$$

$$f(x) \geq s_u$$

Man nennt dann

$s_o$  **obere Schranke** von  $f$ .

$s_u$  **untere Schranke** von  $f$ .

Existieren eine obere *und* eine untere Schranke, dann sagt man, die *Funktion  $f$  ist beschränkt*.

C 1

Beispiel C 1:

Wir betrachten die Funktion  $f(x) = 2x + 3$ . Definitions- und Wertebereich von  $f$  ist ohne Einschränkungen die Menge  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen, d. h.,  $f$  ist weder nach oben noch nach unten beschränkt. Die Funktion  $f$  ist **streng monoton wachsend**, denn für  $x_1 < x_2$  gilt stets  $f(x_1) < f(x_2)$ .

*Begründung:*

Aus  $x_1 < x_2$  folgt  $2x_1 < 2x_2$  und demzufolge  $2x_1 + 3 < 2x_2 + 3$ , also  $f(x_1) < f(x_2)$ .

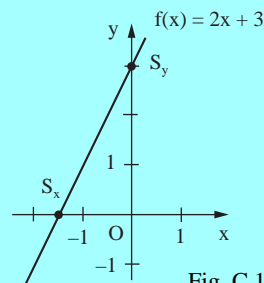


Fig. C 1

## Beispiel C 2:

Gegeben sei die quadratische Funktion  $f(x) = x^2 - 3x - 1,75$  mit  $D_f = \mathbb{R}$ .

Die Funktion besitzt zwei Nullstellen  $x_{01} = \frac{7}{2}$  und  $x_{02} = -\frac{1}{2}$  und ihr Graph ist eine nach oben geöffnete Normalparabel mit dem Scheitelpunkt  $(\frac{3}{2}; -4)$ . Weiterhin lässt sich feststellen:

Die Funktion ist nach unten beschränkt, ihr kleinster Funktionswert ist  $f(\frac{3}{2}) = -4$ . Den Wertebereich bildet demzufolge das halboffene Intervall  $[-4; +\infty[$ . Für alle  $x \leq \frac{3}{2}$  ist die Funktion streng monoton fallend, für alle  $x \geq \frac{3}{2}$  streng monoton wachsend. Die Gerade  $x = \frac{3}{2}$  ist Symmetrieachse des Graphen von  $f$ , aber wegen  $f(x) \neq f(-x)$  und  $f(-x) \neq -f(x)$  ist die Funktion  $f$  weder gerade noch ungerade (Fig. C 2).

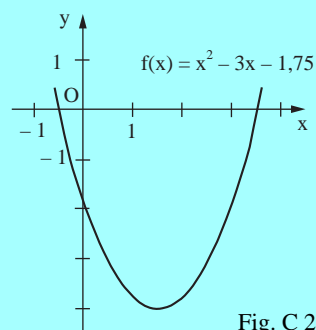


Fig. C 2

C 2

## Beispiel C 3:

Wir betrachten die Funktion  $f(x) = x^3$  mit  $D_f = W_f = \mathbb{R}$  (Fig. C 3).

Diese Funktion ist weder nach oben noch nach unten beschränkt. Sie besitzt (genau) eine Nullstelle bei  $x_0 = 0$  und ist streng **monoton wachsend**, denn aus  $x_1 < x_2$  kann wegen  $x_1 + h = x_2$  ( $h \in \mathbb{R}$ ,  $h > 0$ ) geschlossen werden:

$$f(x_1) = x_1^3, \quad f(x_2) = x_2^3 = (x_1 + h)^3$$

Da  $(x_1 + h) > x_1$ , ist auch  $(x_1 + h)^3 > x_1^3$  und demzufolge gilt:  $f(x_1) < f(x_2)$ .

Wegen  $f(x) = x^3$  und  $f(-x) = -x^3$  folgt weiter  $f(-x) = -f(x)$ , d.h., die Funktion  $f(x) = x^3$  ist ungerade. (vgl. Definition A 3)

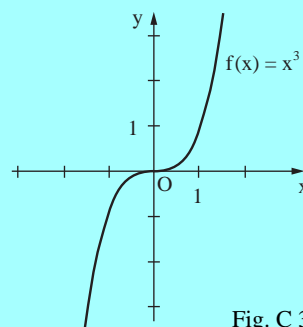


Fig. C 3

C 3

Für eine Monotonieaussage reicht es nicht aus, wenn nur für einige Argumente die Funktionswerte untersucht werden – es muss vielmehr der gesamte Definitionsbereich bzw. das vorgegebene Intervall berücksichtigt werden. Dabei kann die Untersuchung des Monotonieverhaltens nach Definition C 1 freilich manchmal sehr aufwändig sein, weshalb an späterer Stelle (Kapitel D) ein einfacher zu handhabendes Monotoniekriterium erarbeitet wird.

Beispiele für nach oben *und* nach unten **beschränkte** Funktionen sind:

a)  $f(x) = \sin x$ ,  $D_f = \mathbb{R}$ ,  $W_f = [-1; 1]$  (Fig.

Jede Zahl  $s_0 \geq 1$  ist eine obere Schranke, jede Zahl  $s_u \leq -1$  eine untere Schranke dieser Funktion.

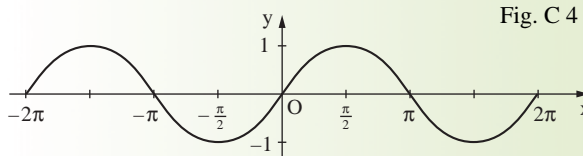


Fig. C 4

b)  $f(x) = \sqrt{49 - x^2}$ ,  $D_f = [-7; 7]$ ,  $W_f = [0; 7]$  (Fig. C 5)

Für diese Funktion stellt beispielsweise  $s_0 = 8$  eine obere und  $s_u = -1$  eine untere Schranke dar.

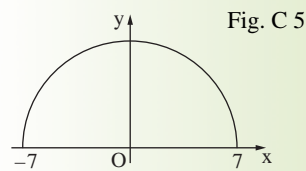


Fig. C 5

Die beiderseitige Beschränktheit einer Funktion zeigt sich grafisch darin, dass es einen durch die Geraden  $y = s_o$  und  $y = s_u$  begrenzten Horizontalstreifen gibt, innerhalb dessen alle zum Graph der Funktion gehörenden Punkte liegen.

Zwischen dem Monotonieverhalten und der Umkehrbarkeit einer Funktion (s. Abschnitt A 5) besteht ein Zusammenhang. Wie die Beispiele A 22 und A 23 schon vermuten ließen, gilt:

C 1

### Satz C 1: Existenz einer Umkehrfunktion

Jede in ihrem Definitionsbereich streng monotone Funktion  $f$  besitzt eine Umkehrfunktion.

*Beweis:*

Wir haben zu zeigen, dass die Zuordnung  $f$  *umkehrbar* eindeutig ist (s. Definition A 9).

Da  $f$  eine in  $D_f$  streng monotone Funktion ist, gilt für alle  $x_1, x_2 \in D_f$  mit  $x_1 \neq x_2$  auch stets  $f(x_1) \neq f(x_2)$ , d. h., es muss nach Definition C 1 dann entweder  $f(x_1) > f(x_2)$  oder  $f(x_1) < f(x_2)$  sein.

Das heißt aber:

- Zu jedem beliebigen  $x$  gibt es einen eindeutig bestimmten Wert  $f(x)$  und
- umgekehrt gibt es zu jedem beliebigen  $f(x)$  ein eindeutig bestimmtes  $x$ .

Mit anderen Worten:  $f$  ist eine *umkehrbar* eindeutige Zuordnung und damit *umkehrbar*.

## C 2 Grenzwert von Funktionen; Grenzwertsätze

Die Begriffe *Grenzwert* und *Stetigkeit* (s. Abschnitt C 3) charakterisieren die Werte  $f(x)$  einer Funktion  $f$  für den Fall, dass deren Argumente  $x$  ein bestimmtes Verhalten zeigen. Genauer formuliert geht es um die folgenden zwei Fälle: Zum einen sei  $f$  eine Funktion, die zwar in einer gewissen Umgebung von  $x_0$ , aber nicht an dieser Stelle selbst definiert ist. Man möchte nun wissen, wie sich die Funktionswerte von  $f$  bei Annäherung an die Stelle  $x_0$  verhalten. Zum anderen ist von Interesse, welches Verhalten die Funktionswerte zeigen, wenn die Argumente beliebig wachsen ( $x \rightarrow +\infty$ ) bzw. beliebig klein werden ( $x \rightarrow -\infty$ ).

Betrachten wir als Beispiel die Funktion  $f$  mit  $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$  und  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ .

Diese Funktion hat an der Stelle  $x_0 = 2$  eine Definitionslücke, d. h., in unmittelbarer Umgebung von  $x_0 = 2$  ist  $f$  definiert, an der Stelle  $x_0 = 2$  selbst jedoch nicht: Wählt man für  $x$  Werte, die sich der Definitionslücke  $x_0 = 2$  immer mehr von links nähern (1,9; 1,99; 1,999; ...), so werden die zugehörigen Funktionswerte  $f(x)$  immer kleiner (−29; −299; −2999; ...) und streben für  $x$  gegen 2 offensichtlich gegen  $-\infty$ . Nähert man sich der Definitionslücke von rechts (2,1; 2,01; 2,001; ...), so wachsen die zugehörigen Funktionswerte  $f(x)$  immer mehr (31; 301; 3001; ...) und streben für  $x$  gegen 2 offensichtlich gegen  $+\infty$ . Wenn umgekehrt  $x$  beliebig große oder beliebig kleine Werte annimmt, also gegen  $+\infty$  bzw.  $-\infty$  geht, so scheinen sich die Funktionswerte  $f(x)$  immer mehr dem Wert 1 zu nähern (Fig. C 6).

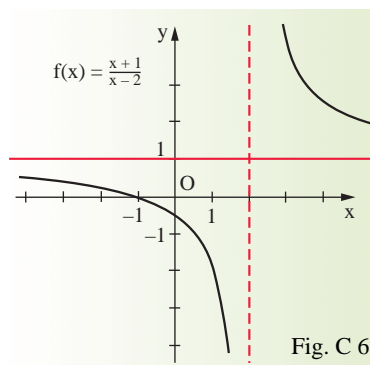


Fig. C 6

Zunächst wird das Verhalten von Funktionen an vorhandenen Definitionslücken genauer untersucht. Unter Ausnutzung der Kenntnisse über Zahlenfolgen bietet sich hierfür folgendes Vorgehen an:



Man betrachtet eine Folge  $(x_n)$  von Zahlen aus dem Definitionsbereich von  $f$  mit dem Grenzwert  $x_0$ . Zu jeder Zahl  $x_n$  einer solchen Folge gibt es genau eine Zahl  $y_n$  aus dem Wertebereich von  $f$ . Demnach ist jeder Folge  $(x_n)$  von Argumenten ( $x_n \in D_f$ ;  $x_n \neq x_0$ ) eine Folge  $(y_n) = (f(x_n))$  von Funktionswerten zugeordnet. Durchläuft also  $x$  die Folge  $(x_n)$ , so durchläuft  $f(x)$  die Folge  $(f(x_n))$ . Mithilfe solcher Folgen  $(f(x_n))$  lässt sich nun das Verhalten der Funktion  $f$  in einer Umgebung von  $x_0$  untersuchen und näher bestimmen.

Gegeben sei die Funktion  $f$  mit der Gleichung  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ .  $f$  ist an der Stelle  $x_0 = 1$  nicht definiert. Um das Verhalten der Funktion bei Annäherung an die Stelle  $x_0 = 1$  zu ermitteln, betrachten wir die Folgen  $(x_n) = (1 - \frac{1}{n})$  und  $(x'_n) = (1 + \frac{1}{n})$ .

Die Glieder dieser Folgen nähern sich mit wachsendem  $n \in \mathbb{N}$  von links an  $x_0 = 1$  und von rechts ebenfalls an  $x_0 = 1$ , denn es gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{n}) = 1$  bzw.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n}) = 1$ .

Für die Folgen  $(f(x_n))$  der zugehörigen Funktionswerte ergibt sich dann:

$$f(x_n) = \frac{x_n^2 - 1}{x_n - 1} = \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 - 1}{1 - \frac{1}{n} - 1} = \frac{1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} - 1}{-\frac{1}{n}} = \frac{-\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{-\frac{1}{n}} = 2 - \frac{1}{n}$$

$$f(x'_n) = \frac{(x'_n)^2 - 1}{x'_n - 1} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 - 1}{1 + \frac{1}{n} - 1} = \frac{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} - 1}{\frac{1}{n}} = \frac{\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = 2 + \frac{1}{n}$$

Beide Folgen von Funktionswerten sind konvergent, denn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right) = 2.$$

Die Grenzwerte stimmen also überein. Ist das aber auch so, wenn man eine ganz beliebige gegen 1 konvergierende Folge  $(x_n)$  von Zahlen aus dem Definitionsbereich wählt? Die durch eine solche Folge  $(x_n)$  eindeutig bestimmte Folge der Funktionswerte wäre dann die Folge  $(f(x_n))$  mit

$$f(x_n) = \frac{x_n^2 - 1}{x_n - 1} = \frac{(x_n + 1)(x_n - 1)}{(x_n - 1)}.$$

Wegen  $x_n \neq 1$  kann man mit  $(x_n - 1)$  kürzen und erhält  $f(x_n) = x_n + 1$ . Da  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ , folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 + 1 = 2.$$

Das heißt: Wenn man mit  $x_n$  nahe genug an 1 herankommt, nähern sich die zugehörigen  $f(x_n)$  beliebig dicht der 2 an. Präziser formuliert: Für jede gegen 1 konvergierende Folge  $(x_n)$ , deren Glieder dem Definitionsbereich von  $f$  angehören, konvergiert die Folge der zugehörigen Funktionswerte  $(f(x_n))$  gegen 2. Diese Übereinstimmung ist Anlass zu folgender Begriffsbildung:

#### Definition C 3:

Es sei  $f$  eine in einer Umgebung von  $x_0$  (eventuell mit Ausnahme von  $x_0$  selbst) definierte Funktion. Die Zahl  $g$  heißt **Grenzwert der Funktion  $f$  an der Stelle  $x_0$** , wenn für jede Folge  $(x_n)$  mit  $x_n \in D_f$  und  $x_n \neq x_0$ , die den Grenzwert  $x_0$  hat, die Folge der zugehörigen Funktionswerte  $(f(x_n))$  gegen den Wert  $g$  konvergiert.

Man schreibt  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$ , wobei wegen  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  die Formulierung  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g$  dasselbe aussagt.

*Hinweise zur Definition C 3:*

- a) Hat die Funktion  $f(x)$  an der Stelle  $x_0$  den Grenzwert  $g$  (oder: Ist  $f$  an der Stelle  $x_0$  konvergent zum Grenzwert  $g \dots$ ), so bedeutet das anschaulich, dass der Graph von  $f$  sowohl von links als auch von rechts in den Punkt  $(x_0; g)$  „einmündet“, ganz unabhängig davon, ob  $f$  an der Stelle  $x_0$  definiert ist oder nicht. Der Wert  $g$  kann auch der uneigentliche Grenzwert  $+\infty$  oder  $-\infty$  sein.
- b) Bei Grenzwertuntersuchungen bedient man sich gelegentlich einer beliebigen Nullfolge  $(h_n)$ . Dann **konvergiert** nämlich **die Folge**  $(x_0 + h_n)$  für wachsendes  $n$  gegen  $x_0$ . Mit anderen Worten: Statt  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  bildet man  $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h)$  und untersucht, ob sich unabhängig von der Auswahl der Nullfolge  $(h_n)$  eine feste Zahl  $g$  als Grenzwert ergibt (h-Methode).
- c) Ist bekannt, dass für eine Funktion  $f$  an einer Stelle  $x_0$  ein Grenzwert existiert, und lässt sich eine bestimmte Zahl  $g$  als Grenzwert vermuten, dann kann man diese Vermutung bestätigen, indem man zeigt, dass die Folge  $(f(x_n) - g)$  eine Nullfolge ist.

**C 4****Beispiel C 4:**

Gegeben sei die Funktion  $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2}$  mit  $x \neq 2$ . Bestimmt werden soll der **Grenzwert von  $f$  an der Stelle  $x_0 = 2$** , falls er existiert.

Wir betrachten eine beliebige Folge  $(x_n)$  mit  $x_n \neq 2$ , die gegen 2 konvergiert. Dann gilt für die Folge der zugehörigen Funktionswerte

$$f(x_n) = \frac{x_n^2 - 4x_n + 4}{x_n - 2} = \frac{(x_n - 2)^2}{x_n - 2}.$$

Wegen  $x_n \neq 2$  kann man kürzen und erhält  $f(x_n) = x_n - 2$ . Damit ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - 2) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) - \lim_{n \rightarrow \infty} 2 = 2 - 2 = 0.$$

Also: Die Stelle  $x_0 = 2$  gehört zwar nicht zum Definitionsbereich der Funktion  $f$ , doch der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  existiert und ist gleich 0.

**C 5****Beispiel C 5:**

Betrachtet man die Funktion  $f(x) = |x|$ , so lässt sich vermuten, dass sie an der Stelle  $x_0 = 0$  den Grenzwert  $g = 0$  besitzt. Zur Bestätigung dieser Vermutung wählen wir eine beliebige Folge  $(x_n)$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  ( $x_n \neq 0$  für alle  $n$ ) und zeigen, dass die **Folge**

$(f(x_n) - g) = (|x_n| - 0) = (|x_n|)$  eine **Nullfolge** ist.

Da  $(x_n)$  nach Voraussetzung eine Nullfolge ist, gilt  $|x_n - 0| = |x_n| < \varepsilon$ . Wegen

$\|x_n| - 0| = \|x_n\| = |x_n|$  ist dann aber auch  $(|x_n|)$  eine Nullfolge. Mit anderen Worten:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0.$$

Unmittelbar einsichtig sind die Grenzwerte von  $f(x) = c$  und  $g(x) = x$ . Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} c = c \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0.$$

C 6

Beispiel C 6:

Die Funktion  $f(x) = 2^{\frac{1}{x-1}}$  ist an der Stelle  $x_0 = 1$  nicht definiert. Es ist zu untersuchen, ob  $f(x)$  an der Stelle  $x_0 = 1$  einen Grenzwert besitzt.

- a) Wir wählen die spezielle Folge  $(x_n) = (1 - \frac{1}{n})$  ( $x_n \neq 1$  für alle  $n$ ), die für  $n \rightarrow \infty$  gegen 1 konvergiert. Für die Folge der zugehörigen Funktionswerte gilt dann

$$f(x_n) = 2^{\frac{1}{x_n-1}} = 2^{\frac{1}{1-\frac{1}{n}-1}} = 2^{\frac{1}{-\frac{1}{n}}} = 2^{-n} = \frac{1}{2^n} \quad \text{und damit} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

- b) Wählt man die Folge  $(x_n') = (1 + \frac{1}{n})$  ( $x_n' \neq 1$  für alle  $n$ ), die ebenfalls gegen 1 konvergiert, so erhält man für die Folge der zugehörigen Funktionswerte

$$f(x_n') = 2^{\frac{1}{x_n'-1}} = 2^{\frac{1}{1+\frac{1}{n}-1}} = 2^{\frac{1}{\frac{1}{n}}} = 2^n \quad \text{und in diesem Falle damit} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n') = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = +\infty.$$

Das heißt: Die beiden Folgen von Funktionswerten haben unterschiedliche Grenzwerte – folglich existiert der Grenzwert von  $f(x)$  an der Stelle  $x_0 = 1$  *nicht*.

C 7

Beispiel C 7:

Zu untersuchen ist das Verhalten der Funktion  $f$  mit  $f(x) = \begin{cases} x^2; & x \leq 0 \\ 1+x; & x > 0 \end{cases}$  an der Stelle  $x_0 = 0$ .

- a) Wir wählen eine beliebige Folge  $(x_n)$  mit  $x_n < 0$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ . Dann ergibt sich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 = 0.$$

- b) Für beliebige Folgen  $(x_n)$  mit  $x_n > 0$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  erhalten wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x_n) = 1.$$

Aus den beiden Ergebnissen folgt: Die Funktion  $f$  besitzt an der Stelle  $x_0 = 0$  keinen Grenzwert.

Das Beispiel C 7 macht Folgendes deutlich:

- Aus der Existenz (Berechenbarkeit) des Funktionswertes  $f(x_0)$  darf nicht gefolgert werden, dass auch der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existiert und mit  $f(x)$  übereinstimmt.
- Nähert man sich der Stelle  $x_0$  von links, dann konvergieren die zugehörigen Funktionswertfolgen gegen 0; nähert man sich von rechts, konvergieren die Funktionswertfolgen gegen 1. In solch einem Fall sagt man: Die Funktion  $f(x)$  hat einen *linksseitigen* bzw. *rechtsseitigen Grenzwert*.  
Man schreibt:  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = g_l$  bzw.  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = g_r$

Die Anwendung der einseitigen Grenzwerte liegt auf der Hand:

- (1) Wenn eine Funktion  $f$  an einer Stelle  $x_0$  einen linksseitigen und einen rechtsseitigen Grenzwert hat und beide sind gleich einer Zahl  $g$ , dann ist  $f$  an der Stelle  $x_0$  konvergent zum Grenzwert  $g$ .
- (2) Sind sie nicht gleich bzw. existiert nur ein einseitiger Grenzwert, dann hat  $f$  an der Stelle  $x_0$  einen einseitigen Grenzwert oder keinen.
- (3) Existiert weder ein linksseitiger noch ein rechtsseitiger Grenzwert, dann ist  $f$  an der Stelle  $x_0$  nicht konvergent.

C 8

Beispiel C 8:

Gegeben sei die Funktion  $f(x) = \frac{x}{|x|}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq 0$ . Es ist zu untersuchen, ob die Funktion an der Stelle  $x_0 = 0$  einen Grenzwert besitzt.

Für den linksseitigen Grenzwert ergibt sich:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{x}{|x|} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{x}{-x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (-1) = -1$$

Für den rechtsseitigen Grenzwert erhält man:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x}{|x|} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 1 = 1$$

Damit hat die Funktion  $f$  an der Stelle  $x_0 = 0$  keinen Grenzwert, sondern nur die einseitigen Grenzwerte  $-1$  und  $1$  (Fig. C 7).

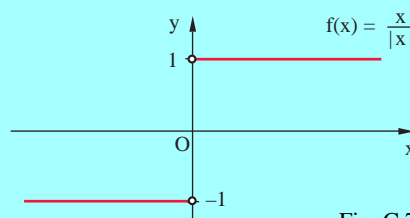


Fig. C 7

C 9

Beispiel C 9:

Wir betrachten die Funktion  $f(x) = \begin{cases} x^2; & x < 1 \\ x; & x \geq 1 \end{cases}$ . Zur Bestimmung eines möglichen Grenzwertes dieser abschnittsweise definierten Funktion müssen wir versuchen, an der Stelle  $x_0 = 1$  einen linksseitigen bzw. rechtsseitigen Grenzwert zu ermitteln.

*Linksseitiger Grenzwert*

Wir verwenden dazu beliebige Folgen  $(x_n)$  mit  $x_n < 1$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ . Für den Grenzwert der zugehörigen Folge der Funktionswerte erhält man:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 = 1 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = 1$$

*Rechtsseitiger Grenzwert*

Wir betrachten beliebige Folgen  $(x_n)$ , die von rechts gegen 1 konvergieren, für die also

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$  mit  $x_n > 1$  gilt. Für den Grenzwert der jeweiligen Funktionswertfolgen erhält man:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = 1$$

Linksseitiger und rechtsseitiger Grenzwert an der Stelle  $x_0 = 1$  stimmen überein. Demzufolge ist die Funktion  $f$  an der Stelle  $x_0 = 1$  konvergent zum Grenzwert  $g = 1$ .

Aus Abschnitt B 2.2 (Satz B 7 unter Einschluss von Aufg. BA 109) ergeben sich folgende Sätze:

C 2

**Satz C 2: Eindeutigkeit des Grenzwertes einer Funktion**

Existiert der Grenzwert einer Funktion, so ist er auch eindeutig bestimmt.

C 3

**Satz C 3: Grenzwertsätze für Funktionen**

Besitzen die Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  an der Stelle  $x_0$  einen Grenzwert, so gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x); \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} \quad \text{mit} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0 \quad \text{und} \quad g(x) \neq 0.$$



Wir beschränken uns auf den *Nachweis des Grenzwertsatzes für die Summe zweier Funktionen*:

Es sei  $(x_n)$  eine beliebige Folge, die gegen  $x_0$  konvergiert, für die also  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  mit  $x_n \neq x_0$  ist.

Nach Voraussetzung konvergieren dann auch die zugehörigen Funktionswertfolgen  $(f(x_n))$  und  $(g(x_n))$  und es gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  bzw.  $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ .

Dann existiert nach Satz B 7 der Grenzwert der **Summe der Funktionswertfolgen** mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) + g(x_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n).$$

Wegen  $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) + g(x_n)) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$  folgt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x). \quad \text{w.z.b.w.}$$

Wichtig für die Anwendung der Grenzwertsätze ist, dass die rechts stehenden Einzelgrenzwerte existieren und endlich sind (im Nenner vorkommende Grenzwerte müssen ungleich 0 sein). Dann existiert auch jeweils der links stehende Grenzwert und kann entsprechend bestimmt werden.

Beispiel C 10:

Bestimmt werden soll der Grenzwert der Funktion

$$f(x) = \frac{2x^2 - 2x - 12}{x - 3} \quad (x \neq 3) \text{ an der Stelle } x_0 = 3.$$

Da Funktionswert und Grenzwert der Nennerfunktion an der Stelle  $x_0 = 3$  den Wert 0 besitzen, lassen sich die Grenzwertsätze nicht anwenden.

Helfen kann man sich in solchen Fällen zum Beispiel dadurch, dass man die Zähler- oder/und die Nennerfunktion in ein Produkt zerlegt und anschließend kürzt:

$$f(x) = \frac{(2x + 4)(x - 3)}{(x - 3)}, \quad (x \neq 3)$$

Wegen  $x \neq 3$  kann man kürzen und erhält  $f(x) = 2x + 4$ . Damit gilt:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (2x + 4) = \lim_{x \rightarrow 3} 2x + \lim_{x \rightarrow 3} 4 = 6 + 4 = 10$$

Die Funktion  $f(x) = \frac{2x^2 - 2x - 12}{x - 3}$  hat demzufolge an der Stelle  $x_0 = 3$  den Grenzwert 10.

C 10

Beispiel C 11:

Es ist der Grenzwert der Funktion  $f(x) = \sin x$  an einer beliebigen Stelle  $x_0$  zu bestimmen. Mithilfe der „h-Methode“ (statt  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x$  bilden wir  $\lim_{h \rightarrow 0} \sin(x_0 + h)$ ) erhalten wir unter Anwendung des entsprechenden Additionstheorems („Formeln und Tabellen“, S. 35)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sin(x_0 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} (\sin x_0 \cdot \cosh + \cos x_0 \cdot \sinh).$$

Die Anwendung der Grenzwertsätze ergibt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sin(x_0 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} \sin x_0 \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \cosh + \lim_{h \rightarrow 0} \cos x_0 \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \sinh.$$

Aufgrund der Eigenschaften der Kosinus- bzw. der Sinusfunktion strebt  $\cosh$  gegen den Wert 1 und  $\sinh$  gegen den Wert 0, wenn  $h$  gegen 0 geht. Damit ergibt sich

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sin(x_0 + h) = \sin x_0. \quad \text{Analog gilt } \lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0.$$

C 11

C 12

Beispiel C 12:

Die Berechnung mancher Grenzwerte kann bei Beschränkung auf elementare Mittel sehr aufwändig oder sogar unmöglich sein. Die Verwendung eines GTA stellt dann oftmals – wenn auch nicht immer – eine wesentliche Hilfe dar. Beispielsweise weist der Rechner für

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$  sofort den Wert 1 aus – während für den im Beispiel C 6 a) mit 0 berechneten linksseitigen Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{2^{x-1}}$

keine Lösung angegeben wird.

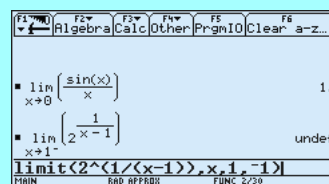


Fig. C 8

C 13

Beispiel C 13:

Die Funktion  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$  ( $x \neq 0$ ) soll auf Existenz eines Grenzwertes an der Stelle  $x_0 = 0$  untersucht werden.

Wir betrachten dazu eine Folge  $(x_n)$  mit  $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ , für die  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  gilt. Die zugehörigen Funktionswerte konvergieren dann ebenfalls gegen 0, denn für alle Glieder der Folge  $(f(x_n))$  gilt  $f(x_n) = \sin \frac{1}{x_n} = \sin \frac{1}{\frac{1}{2n\pi}} = \sin 2n\pi = 0$  (konstante Folge mit dem Grenzwert 0).

Nun verwenden wir eine Folge  $(x_n')$  mit  $x_n' = \left(\frac{2}{\pi(1+4n)}\right)$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n' = 0$ . Dann gilt für alle Glieder der Folge  $(f(x_n'))$

$$f(x_n') = \sin \frac{1}{x_n'} = \sin \frac{1}{\frac{2}{\pi(1+4n)}} = \sin \frac{\pi}{2} (1+4n) = \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1.$$

$(f(x_n'))$  ist also wiederum eine konstante Folge, diesmal jedoch mit dem Grenzwert 1.

Wegen  $0 \neq 1$  folgt: Die Funktion  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$  hat an der Stelle  $x_0 = 0$  keinen Grenzwert.

Bislang haben wir nur Grenzwerte an einer festen Stelle  $x_0$  und unter der Voraussetzung betrachtet, dass die Funktionen in einer gewissen Umgebung von  $x_0$  definiert waren, eventuell mit Ausnahme der Stelle  $x_0$  selbst. Viele Funktionen haben aber als Definitionsbereich die Menge  $\mathbb{R}$  bzw. halboffene Intervalle  $]-\infty; a]$  oder  $[a; +\infty[$ . Ihre Definitionsbereiche sind also nach oben bzw. nach unten nicht beschränkt. Die sich daraus ergebende Frage hatten wir bereits eingangs des Kapitels C aufgeworfen:

Wie verhalten sich die Zahlen  $f(x)$ , wenn  $x$  unbeschränkt wächst oder fällt, also  $x$  gegen  $+\infty$  ( $x \rightarrow +\infty$ ) bzw.  $x$  gegen  $-\infty$  ( $x \rightarrow -\infty$ ) strebt?

Bei Zahlenfolgen war gerade der erste Fall eine typische Fragestellung. Im Kapitel B wurden spezielle Folgen betrachtet wie

- $(a_n) = \left(\frac{n-1}{n}\right)$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-\frac{1}{n}}{1} = 1$  (Folge mit dem Grenzwert 1).
- $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$  (Nullfolge);
- $(a_n) = (n)$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$ ;

Im letzten Fall hatten wir  $(a_n)$  *bestimmt divergent* genannt (s. Bemerkung S. 58). Man sagt dazu auch, dass  $(a_n)$  den *uneigentlichen Grenzwert*  $+\infty$  habe.  $\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$  bedeutet dann, dass es zu jeder beliebigen reellen Zahl  $K > 0$  eine natürliche Zahl  $n$  gibt, so dass  $n > K$  gilt.

Betrachten wir unter diesen Gesichtspunkten die Funktion  $f$  mit  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $D_f = ]0; +\infty[$ .

Für jede Folge  $(x_n)$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$  gilt analog zu oben, dass es zu jeder beliebigen Zahl  $m > 0$  eine Zahl  $n$  mit  $x_n > m$  gibt, was gleichbedeutend ist mit  $\frac{1}{x_n} < \frac{1}{m}$ . Daraus folgt für die Funktionswerte  $f(x_n) = \frac{1}{x_n} < \frac{1}{m} < \varepsilon$  ( $> 0$ ), denn  $\frac{1}{m}$  ist bei geeigneter Wahl von  $m$  kleiner als jede noch so kleine positive Zahl  $\varepsilon$ .  $(f(x_n))$  ist demzufolge eine Nullfolge und es gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0$ .

Auf dieser Grundlage lässt sich die Definition C 3 wie folgt ergänzen:

#### Definition C 4:

Es sei  $f$  eine nach oben bzw. nach unten unbeschränkte Funktion. Eine Zahl  $g$  heißt **Grenzwert von  $f$  für unbeschränkt wachsendes oder fallendes  $x$**  ( $x \rightarrow +\infty$  bzw.  $x \rightarrow -\infty$ ), wenn für jede Folge  $(x_n)$  mit dem Grenzwert  $+\infty$  bzw.  $-\infty$  die Folge der zugehörigen Funktionswerte  $(f(x_n))$  gegen den Wert  $g$  konvergiert.

Man schreibt:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = g$  bzw.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = g$ .

C 4

Auch zur Berechnung solcher Grenzwerte gelten die Grenzwertsätze (Satz C 3) mit den dort genannten Voraussetzungen.

#### Beispiel C 14:

Zu untersuchen ist die Funktion  $f: f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , für  $x \rightarrow \pm\infty$ .

Aus  $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$  folgt durch entsprechende Umformungen  $f(x) = \frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}$  und

damit  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = 1$ .

Nicht allein für das schnelle Darstellen des Funktionsgraphens, sondern auch für das Berechnen der Grenzwerte kann der GTA-Einsatz hilfreich sein:

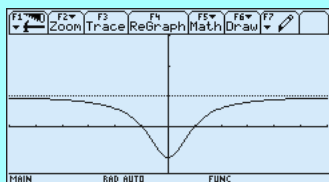


Fig. C 9

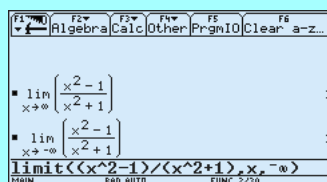


Fig. C 10

C 14

#### Beispiel C 15:

Nunmehr sind alle Hilfsmittel vorhanden, um auch die abschließende Frage des „Schafherdenproblems“ von S. 65 vollständig zu bearbeiten.

Wenn man annimmt, dass die Herde beliebig vergrößert werden kann, dann ist zur Beantwortung dieser Frage der Grenzwert der Ertragsteigerungsfunktion  $f(x) = \frac{9x}{10(500+x)}$  ( $x \in \mathbb{N}$ ) für eine beliebig wachsende Anzahl  $x$  an (zusätzlichen) Tieren zu ermitteln:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x}{10(500+x)} = \frac{9}{10} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{500+x} = \frac{9}{10}$$

C 15

Das heißt: Unter den angegebenen Bedingungen könnte Adams im „theoretischen Grenzfall“ seinen Ertragsanteil um  $\frac{9}{10}$  steigern, er erhielte also den gesamten Gewinn – der Anteil der anderen Züchter fiel nicht mehr ins Gewicht.

Eine Gerade, an die sich der Graph einer Funktion  $f$  immer mehr „anschießt“, wird **Asymptote** des Graphen von  $f$  genannt. Dabei kann dieses „Anschießen“ sowohl für beliebig groß werdende Argumente als auch durch Annäherung an eine bestimmte Stelle, einen bestimmten  $x$ -Wert erfolgen. In obigem Beispiel C 14 ist die Gerade mit der Gleichung  $y = 1$  eine *waagerechte Asymptote*.

C 16

Beispiel C 16:

Gegeben ist die Funktion  $f(x) = \frac{1}{x-2}$ .

Wegen  $v(2) = 0$  und  $u(2) = 1$  hat  $f$  an der Stelle  $x_p = 2$  einen Pol. Wir untersuchen das Verhalten von  $f$  bei Annäherung an die Polstelle von links und von rechts (ausführlich s. Beispiel D 44).

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty \quad (\text{ausführlich s. Beispiel D 44})$$

Der Graph von  $f$  schmiegt sich in diesem Falle also für  $x \rightarrow 2$  (und zwar bei Annäherung von beiden Seiten) immer mehr an die Gerade  $x = 2$  an (Fig. C 11).  $x = 2$  ist eine *senkrechte Asymptote* oder auch **Polasymptote**.

Für  $x \rightarrow \pm\infty$  ergibt sich  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x-2} = 0$ . Die  $x$ -Achse ist eine *waagerechte Asymptote* des Graphen von  $f$ .

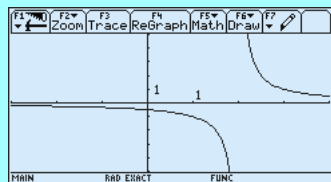


Fig. C 11

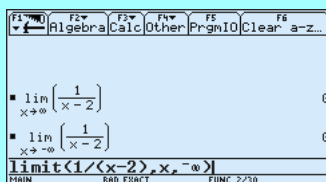


Fig. C 12

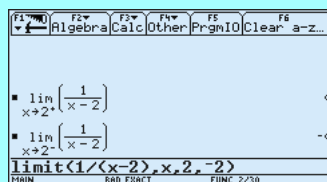


Fig. C 13

## C 3 Stetigkeit von Funktionen

Stetigkeit ist ein fundamentaler Begriff der Analysis. Eine ungefähre Vorstellung von Stetigkeit hat eigentlich jeder Mensch, unabhängig von seiner mathematischen Grundbildung, z. B. im Sinne des gleichmäßigen, ununterbrochenen Verlaufs eines Prozesses.

Analog dazu sind Vorstellungen vom Begriff „**stetige Funktion**“ gemeinhin darauf gerichtet, dass der Graph einer solchen Funktion keine „Sprünge“ macht, dass er keine Lücken aufweist, dass er sich gewissermaßen „in einem Zuge“ (ohne den Stift abzusetzen) zeichnen lässt. Diese anschaulichen Vorstellungen allein reichen aber für die Zwecke der Mathematik nicht aus. Wir wollen deshalb im Folgenden den Begriff „*Stetigkeit einer Funktion*“ unter Verwendung der Begriffe „*Konvergenz von Zahlenfolgen*“ und „*Grenzwert einer Funktion*“ exakt definieren.

Systematisiert man die Überlegungen zu Grenzwerten von Funktionen, so werden folgende Fälle deutlich:

- $f$  besitzt an der Stelle  $x_0$  einen Grenzwert; Grenzwert für  $x \rightarrow x_0$  und Funktionswert  $f(x_0)$  stimmen überein.

Dies trufe zum Beispiel für die Funktion  $f(x) = x^2$  an der Stelle  $x_0 = 2$  zu, da

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = f(2) = 4 \text{ gilt (Fig. C 14).}$$

- b)  $f$  besitzt an der Stelle  $x_0$  einen Grenzwert; Grenzwert für  $x \rightarrow x_0$  und Funktionswert  $f(x_0)$  stimmen nicht überein.

Ein solcher Fall läge beispielsweise vor, wenn  $f$  durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2; & x \neq 2 \\ 3; & x = 2 \end{cases} \text{ definiert ist, da } \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4 \neq f(2) = 3 \text{ (Fig. C 15).}$$

- c)  $f$  besitzt an der Stelle  $x_0$  einen Grenzwert, ist aber selbst in  $x_0$  nicht definiert.

Ein Beispiel dafür wäre die Funktion  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ ,  $x \neq 1$  (Fig. C 16), für die im Abschnitt C 2 (S. 69) der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$  ermittelt wurde.

- d)  $f$  hat an der Stelle  $x_0$  keinen Grenzwert, es existiert jedoch der Funktionswert an der Stelle  $x_0$ .

So hat z. B. die Funktion  $f$  mit  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1; & x < 3 \\ \frac{1}{2}x + 2; & x \geq 3 \end{cases}$  an der Stelle  $x_0 = 3$  den Wert  $f(3) = \frac{7}{2}$ , aber  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$  existiert nicht (Fig. C 17).

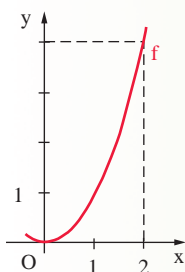


Fig. C 14

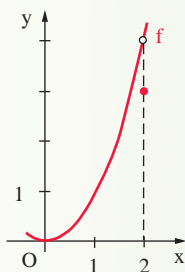


Fig. C 15

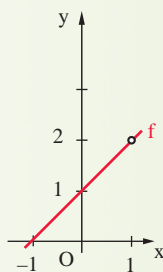


Fig. C 16

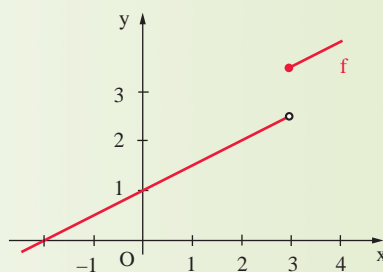


Fig. C 17

Für die Mathematik und ihre Anwendungen ist nun insbesondere der Fall a) von Bedeutung, wo Funktionswert und Grenzwert an einer Stelle  $x_0$  existieren und übereinstimmen:

#### Definition C 5:

Die Funktion  $f$  heißt **an der Stelle  $x_0 \in D_f$  stetig**, wenn der Grenzwert von  $f$  an der Stelle  $x_0$  existiert und mit dem Funktionswert an der Stelle  $x_0$  übereinstimmt.

Die Funktion  $f$  heißt **stetig**, wenn sie an *jeder* Stelle ihres Definitionsbereiches stetig ist.

C 5

Existiert an einer Stelle  $x_0 \in D_f$  einer Funktion kein endlicher Grenzwert bzw. stimmen Grenzwert und Funktionswert von  $f$  in  $x_0$  nicht überein, so ist  $f$  an der Stelle  $x_0$  **unstetig**.

Grenzwert und Stetigkeit einer Funktion sind zwei eng miteinander zusammenhängende Begriffe.

Ein wesentlicher Unterschied kommt darin zum Ausdruck, dass für das Grenzverhalten einer Funktion  $f$  an einer Stelle  $x_0$  das Vorhandensein des Funktionswertes  $f(x_0)$  völlig uninteressant ist ( $f$  muss zwar in einer Umgebung von  $x_0$  definiert sein, jedoch nicht notwendig in  $x_0$  selbst), dagegen ist die Existenz von  $f(x_0)$  bei Stetigkeitsuntersuchungen eine wesentliche Bedingung. Mit anderen Worten: Von Stetigkeit oder Unstetigkeit einer Funktion  $f$  an einer Stelle  $x_0$  kann nur dann gesprochen werden, wenn  $f$  auch in  $x_0$  definiert ist.



C 17

Beispiel C 17:

Gegeben sei die Funktion  $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$  ( $x \neq 1$ ). Diese Funktion ist an der Stelle  $x_0 = 1$  nicht definiert. Deshalb erübrigen sich Untersuchungen zur Stetigkeit an dieser Stelle. Wir wissen aber aus Abschnitt C 2, dass  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$ .

Davon ausgehend lässt sich eine neue Funktion  $g$  „konstruieren“ mit  $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}; & x \neq 1 \\ 2 & ; x = 1 \end{cases}$ .

Für diese Funktion  $g$  gilt an der Stelle  $x_0 = 1$ :  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = g(1) = 2$ , d. h.,  $g$  ist an der Stelle  $x_0 = 1$  stetig. Die Funktion  $g$  nennt man *stetige Fortsetzung* der Funktion  $f$  an der Stelle  $x_0$ . Man sagt auch: Die Definitionslücke von  $f$  ist *stetig behebbar* oder *stetig ergänzbar*.

C 18

Beispiel C 18:

Wir betrachten die Vorzeichenfunktion  $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1; & x > 0 \\ 0; & x = 0 \\ -1; & x < 0 \end{cases}$ .

An der Stelle  $x_0 = 0$  ist  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \operatorname{sgn}(x) = 1$  und  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \operatorname{sgn}(x) = -1$  verschieden von  $\operatorname{sgn}(x_0) = 0$ .

Die Funktion ist an der Stelle  $x_0 = 0$  unstetig. Sie weist einen *endlichen Sprung* auf.

C 19

Beispiel C 19:

Die Funktion  $f(x) = \frac{1}{x}$  besitzt an der Stelle  $x_0 = 0$  eine Definitionslücke. Für den rechtsseitigen Grenzwert gilt  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ , für den linksseitigen Grenzwert erhält man  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty$ .

Die Funktion  $f$  ist an der Stelle  $x_0 = 0$  nicht stetig ergänzbar; sie weist an dieser Stelle einen *unendlichen Sprung* auf.

Ausgehend von den Grenzwertsätzen für Funktionen (Satz C 3) können entsprechende Sätze über stetige Funktionen formuliert werden, die hier ohne Beweis mitgeteilt seien:

C 4

#### Satz C 4: Stetigkeitssätze für Funktionen

Besitzen die Funktionen  $f$  und  $g$  einen gemeinsamen Definitionsbereich  $D$  und sind sie in  $x_0 \in D$  stetig, so sind auch die Funktionen

$c \cdot f$  ( $c \in \mathbb{R}$ ),  $f + g$ ,  $f - g$  und  $f \cdot g$

in  $x_0$  stetig. Ist ferner  $f(x_0) \neq 0$ , so sind außerdem die Funktionen

$h = \frac{1}{f}$  und  $k = \frac{g}{f}$  mit  $D_h = D_k = D \setminus \{x \mid f(x) = 0\}$  in  $x_0$  stetig.

Mithilfe von Satz C 4 gelangt man zu Aussagen über die Stetigkeit der bekannten elementaren Funktionen. So lässt sich feststellen, dass lineare Funktionen, quadratische Funktionen und Potenzfunktionen  $f(x) = x^n$  ( $x \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ) *überall* sowie alle Funktionen, die aus den obigen Grundfunktionen mithilfe der Grundrechenoperationen gebildet werden können, *in ihrem jeweiligen Definitionsbereich* stetig sind.

Also ist z.B.  $f(x) = x^3 - x + 3$  für  $x \in \mathbb{R}$  und  $g(x) = \frac{x^5 + 3x^2 - 6x + 5}{(x+1)(x-2)}$  für  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$  stetig.

Eine Funktion  $f$  heißt *stetig in einem offenen Intervall*  $]a; b[$ , wenn sie an jeder Stelle dieses Intervalls stetig ist. Eine Funktion heißt *stetig in einem abgeschlossenen Intervall*  $[a; b]$ , wenn sie im offenen Intervall  $]a; b[$  stetig ist und wenn für die Randstellen gilt

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = f(a) \text{ (rechtsseitige Stetigkeit) bzw. } \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x) = f(b) \text{ (linksseitige Stetigkeit),}$$

und zwar nur für solche Folgen  $(x_n)$ , die ganz in  $]a; b[$  verlaufen und gegen  $a$  bzw.  $b$  konvergieren. Das heißt also: Man nähert sich dem Intervallende  $a$  nur von rechts und dem Intervallende  $b$  nur von links. Dementsprechend ist  $f$  in  $a$  rechtsseitig stetig und in  $b$  linksseitig stetig.

Beispiel C 20:

Gegeben sei die Funktionenschar  $f_a$  mit  $f_a(x) = \begin{cases} e^x; & x \in [1; +\infty[ \\ a \cdot x; & x \in ]-\infty; 1[ \end{cases}$ .

Man ermittle, für welche Werte des Parameters  $a$  ( $a \in \mathbb{R}$ )  $f_a$  an der Stelle  $x_0 = 1$  stetig ist.

Die Funktion ist für  $x_0 = 1$  definiert, es ist  $f_a(1) = e$ . Für den rechtsseitigen Grenzwert gilt

$$\lim_{x \rightarrow 1} e^x = e; \text{ für den linksseitigen Grenzwert erhält man } \lim_{x \rightarrow 1} a \cdot x = a. \text{ Das bedeutet: Ein Grenzwert von } f_a \text{ an der Stelle } x_0 = 1 \text{ existiert nur für } a = e. \text{ Er stimmt mit dem Funktionswert an dieser Stelle überein. Also: Wenn der Parameter } a \text{ den Wert } e \text{ (EULERSche Zahl) annimmt, dann ist } f \text{ in } x_0 = 1 \text{ stetig (Fig. C 18 bis C 20).}$$

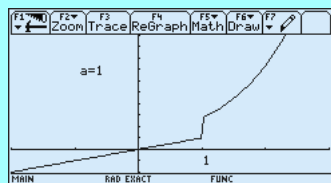


Fig. C 18

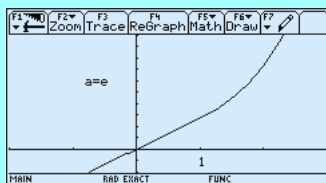


Fig. C 19

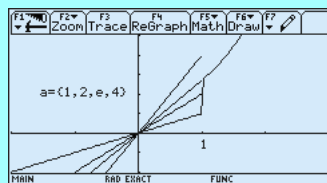


Fig. C 20

C 20

Auf abgeschlossenen Intervallen stetige Funktionen haben besondere Eigenschaften, die für zahlreiche Anwendungen bedeutungsvoll sind.

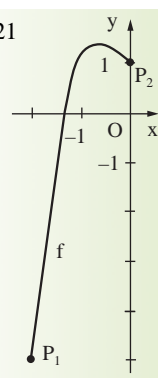
Betrachten wir dazu folgendes Problem:

Gegeben sei die Funktion  $f$  mit  $f(x) = x^3 - x + 1$ . Untersucht werden soll, ob  $f$  im Intervall  $[-2; 0]$  eine **Nullstelle** besitzt.

Wir ermitteln zunächst die Funktionswerte an den Intervallenden. Es ist  $f(-2) = -5$  und  $f(0) = +1$ . Zum Graphen der Funktion gehören demnach die Punkte  $P_1(-2; -5)$  und  $P_2(0; 1)$ , wobei  $P_1$  unterhalb der  $x$ -Achse und  $P_2$  oberhalb der  $x$ -Achse liegt. Da aber  $f$  eine über dem Intervall  $[-2; 0]$  definierte, stetige Funktion ist, muss der Graph von  $f$  in diesem Intervall mindestens einmal die  $x$ -Achse schneiden (Fig. C 21).

Diese anschaulich gewonnene Erkenntnis gilt für alle stetigen Funktionen.

Fig. C 21



### Satz C 5: Nullstellensatz von BOLZANO<sup>1)</sup>

Ist  $f$  eine in einem abgeschlossenen Intervall  $[a; b]$  stetige Funktion und gilt  $f(a) \cdot f(b) < 0$  (haben also  $f(a)$  und  $f(b)$  unterschiedliche Vorzeichen), so gibt es wenigstens eine Stelle  $x_0 \in ]a; b[$  mit  $f(x_0) = 0$ .

C 5

<sup>1)</sup> BOLZANO, Bernhard (1781–1848); böhmischer Religionsphilosoph und Mathematiker

Mit anderen Worten ausgedrückt heißt das: Im Inneren des angegebenen Intervalls befindet sich wenigstens eine Nullstelle von  $f$ . Der Graph der Funktion schneidet/berührt dort mindestens einmal die  $x$ -Achse. Dieser Satz kann deshalb beispielsweise genutzt werden, um Aussagen über mögliche Lösungen von Gleichungen zu erhalten.

Eine Verallgemeinerung von Satz C 5 enthält der nachfolgende „Zwischenwertsatz“:

C 6

**Satz C 6: Satz über die Annahme der Zwischenwerte**

Wenn  $f$  eine über dem abgeschlossenen Intervall  $[a; b]$  stetige Funktion mit  $f(a) \neq f(b)$  ist, dann nimmt  $f$  jeden Wert  $Z$ , der *zwischen* den Funktionswerten  $f(a)$  und  $f(b)$  in den Endpunkten des Intervalls liegt, mindestens einmal an.

Das heißt also: Es kommt nicht darauf an, dass – wie in Satz C 5 gefordert –  $f(a)$  und  $f(b)$  unterschiedliche Vorzeichen haben, es reicht bereits, wenn  $f(a) \neq f(b)$  ist. Der Zwischenwertsatz ist die Grundlage für die näherungsweise Nullstellenbestimmung mithilfe der sogenannten Halbierungsmethode, bei der die gesuchte Nullstelle durch wiederholte Halbierung der betrachteten Intervalle immer enger eingeschachtelt wird.

Eine besonders wichtige Eigenschaft stetiger Funktionen enthält der nachfolgende Satz.

C 7

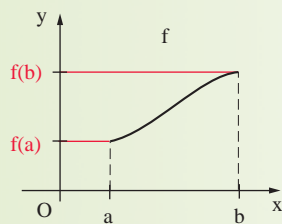
**Satz C 7: Satz vom Maximum und Minimum (Satz von WEIERSTRASS)**

Wenn  $f$  eine in einem abgeschlossenen Intervall  $[a; b]$  stetige Funktion ist, dann hat  $f$  in  $[a; b]$  ein Maximum und ein Minimum.

Dabei bedeutet (s. Fig. C 22/C 23 sowie Abschnitt D 5.2)

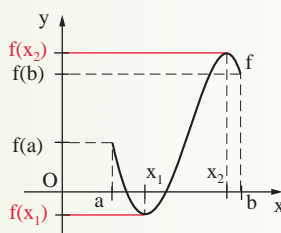
*Maximum* – die *größte Zahl* unter den Funktionswerten von  $f$  in einem Intervall  $I$ ;

*Minimum* – die *kleinste Zahl* unter den Funktionswerten von  $f$  in einem Intervall  $I$ .



$f(a)$  – Minimum       $f(b)$  – Maximum

Fig. C 22



$f(x_1)$  – Minimum       $f(x_2)$  – Maximum

Fig. C 23

Ohne Beweis soll ein Satz über eine weitere Eigenschaft stetiger Funktionen hinzugefügt werden.

C 8

**Satz C 8: Stetigkeit der Umkehrfunktion**

Ist  $f$  eine über  $D_f$  stetige und umkehrbare Funktion, dann ist auch die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  über  $W_f$  stetig.

C 21

**Beispiel C 21:**

Wir betrachten die Funktion  $f$  mit  $f(x) = x^2$  und  $D_f = [0; \infty[$ ,  $W_f = [0; \infty[$ .

Die Funktion  $f$  ist stetig und (da  $f$  streng monoton steigend ist) auch umkehrbar. Daraus folgt:

Auch die Umkehrfunktion  $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$  ist über  $[0; \infty[$  stetig.